УДК 550.831

Дубовенко Ю.И., канд. физ.-мат. наук, н.с.
Институт геофизики НАН Украины, Киев, dubovenko@igph.kiev.ua

О трансформациях гравиполя с помощью задачи Алексидзе

Результат съемок гравиполя – значения $g(S)$ модуля градиента потенциала силы тяжести (МГПС-Т) на некоторой гладкой замкнутой поверхности *S*, целиком охватывающей все тяготеющие массы [1]. Направление $g(S)$ неизвестно, поэтому задачу трансформаций поля невозможно свести к линейным граничным задачам. Приближенное *однозначное* решение задачи можно получить на незамкнутой большой (1°×1)° поверхности *S* .

Один из путей перерасчета значений силы тяжести в региональном масштабе – решение нелинейной внешней граничной задачи Алексидзе для потенциала силы тяжести (в частном случае – для уравнения Лапласа)

$$\Delta u(x_i) = -4\pi\gamma\sigma(x_i),\ u\big|_\infty = 0,\ \left\|\operatorname{grad} u\right\|_S = \left.\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}\,\right|_S = g(S) \equiv \psi(S),\ i = \overline{1,3} \quad (1)$$

Задачу (1) линеаризируют путем предположений относительно направления градиента потенциала на поверхности *S* [2]. Эти предположения вносят погрешности, т.к. определение направления силы тяжести едва ли не сложнее определения модуля силы тяжести.

Проблема разрешимости и единственности задачи (1) принципиальна в гравиметрии: отвечает, можно ли точно однозначно определить силу тяжести во внешнем пространстве, зная точно силу тяжести на замкнутой поверхности *S*, целиком охватывающей массы и какая нужна дополнительная информация. При одновременном определении значения и направления силы тяжести на поверхности *S* вычисление силы тяжести во внешнем пространстве есть решением задачи Дирихле. Но совместные определения модуля и направления силы тяжести дороги и в массовой гравиразведке не проводятся.

Решают задачу (1) разложением по неортогональным функциям с помощью итераций

$$\Delta u^k(x_i) = 0,\ x_i \in G,\ \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left(u^{k-1}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \psi(S),\ i = \overline{1,2}\ ,\ ,\ \alpha_i\left(u^{k-1}\right) = \frac{\partial u^{k-1}}{\partial x_i}\Bigg/\left\|\operatorname{grad} u^{k-1}\right\|_S \quad (2)$$

где u^k – k-е приближение решения задачи (1) в плоском случае.

В плоском случае определения потенциала, как гармоничной функции, если МГПСТ задан на замкнутом контуре, задача (1) не имеет единого решения. Если действительная часть $u(x,y)$ голоморфной на сфере G, полностью охватывающей *S*, функции *f(z)=u (x,y)+iv (x,y)* – решение граничной задачи, мнимая часть будет решением той же задачи.

Показано, что задача (1) имеет единственное решение, если *S* есть многообразием Ляпунова и направление $\alpha_i\left(u^{k-1}\right)$ мало отличается от некоторого заданного направления в смысле метрики $L_2(S)$.

Наша цель – исследовать численную сходимость итераций и погрешность замены уравнения силы тяжести (ему удовлетворяют граничные данные задачи (1) на сфере G с радиусом Земли) уравнением Лапласа. Эта погрешность (разность решений соответствующих задач типа (1)) при размере площади грависъемок 100 км, варьирует в пределах 75 мГал ≤ε≤ 81 мГал [3] при перерасчете значений силы тяжести в свободном воздухе по формуле Пуассона. Максимальная погрешность перерасчета во внешнем пространстве относительно области G равна $\max\varepsilon\big|_{r=2a} = -g(a)/4$, *g(a)* – значение силы тяжести на поверхности идеально сферической Земли. Предположение гармоничности силы тяжести в перерасчете на высоту радиуса Земли генерирует погрешность 245 Гал.

Из-за расхождения векторов составляющих аномалий силы тяжести $|\delta\vec{g}| = |\vec{\gamma}| - |\vec{g}|$, их величины могут значительно отличаться от точных. Если даже аномалия силы тяжести $|\vec{\gamma}| - |\vec{g}|$ точна, ее нельзя пересчитать во внешнем пространстве: дифференциальное уравнение силы тяжести *существенно* зависит от скорости изменения углов между направлением аномалии силы тяжести и координатными осями. В локальных аномалиях это направление может варьировать, и всякое предположение о его поведении существенно *искажает* перерасчет аномалий силы тяжести. Поэтому важно, что $|\vec{\gamma}| - |\vec{g}|$ совпадает с большой точностью с проекцией вектора аномалии силы тяжести на направление вектора $\vec{\gamma}$.

Численное решение задачи (1) для 2- и 3-мерного случая для проверки сходимости итераций (2) на модельных задачах из [1] с известными точными решениями (ради апробации программ) в горизонтальной плоскости *S* на равномерной сетке с шагом 10 км доказало разрешимость задачи (1).

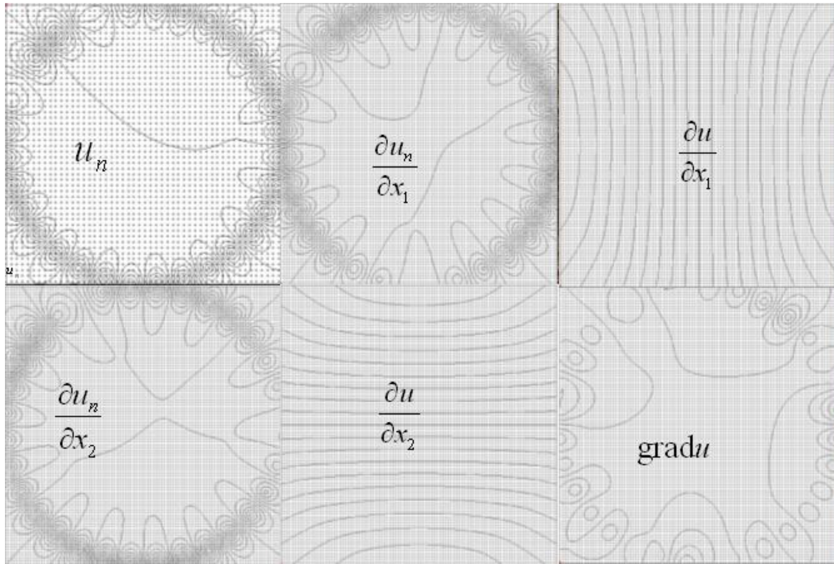
Первое приближение направляющих косинусов α_i – грубые приближения 0, 0, 1, в ином варианте – 0.8, 0, 0.6. Число итераций не превышало 10. Сравнение точных и приближенных значений МГ-

ПСТ обнаруживает, что их граничные значения во всех точках совпадают с точностью до 10^{-7}, изменяясь в пределах 0,07÷0,133, но они сами совпадают с куда меньшей точностью из-за плохой обусловленности задач с производными в граничных условиях (учитываем это при решении практических задач).

Решение с помощью итераций (2) внутренней граничной задачи

$$\Delta u(x_i)=0,\ x_i\in G,\ \left|\mathrm{grad}\, u\right|_S=\psi(S),\ \psi(S)=\frac{10}{x_1^2+x_2^2+5^2}, \qquad (3)$$

с началом координат (0,0,0) на расстоянии 0,2 от нижней кромки единичного куба G (его внешняя нормаль имеет 6 разных направлений, 24 вспомогательные точки взяты на кубе стороной 1,4, а α_i равно 0, 0, 1) выявило следующую особенность. После 5-й итерации граничные значения удовлетворены (погрешность <1%), но решение и его производные не имеют ничего общего с точным решением $U=\frac{10}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+5^2}}$ и ее производными. Увеличение числа итераций до 24 не увеличило точность приближения. Прибавка 25-го фундаментального решения, совпадающего с точным, решило проблему: после 4-й итерации и граничные условия, и значение градиентов и их производных удовлетворены с точностью 10^{-3}.



Сходимость итераций (2) изучена и путем решения внешней задачи (1) для единичного круга с центром в начале координат (точное решение $u=\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\alpha_1^0=\cos(t+\varphi),\ \alpha_2^0=\sin(t+\varphi)$, t – центральный угол, φ – мера возмущения начального направления искомого градиента) с обрывом итераций по условию $|\varepsilon|=\left|\left|\mathrm{grad}\, u^k\right|-1\right|<10^{-5}$. Для сходимости итераций (2) необходимо не только, чтобы точное решение удовлетворяло условию [1]

$$\inf_{x_2\in S}(N,l)>0, \qquad (4)$$

но и выбор такого α_i^0, для которого в (2) не возникали бы коэффициенты a_i^k, не обеспечивающие выполнения условия (4). Условие (4) значит, что направление внешней нормали N неортогонально направлению l косой производной, т.е. l ни в одной точке границы S не совпадает с касательным направлением. Условие выполняется для любой конечной части плоскости S для поля точечного источника, а на всей бесконечной плоскости оно невыполнимо.

При расчете вместо потенциала W силы тяжести потенциала U аномалии силы тяжести ($W=U+V$, где V – известный потенциал нормальной силы тяжести) в линейных приближениях граничных задач грави- и магнитометрии необходимо в качестве граничной функции $\psi(S)$ взять аномалию силы тяжести. В нелинейных задачах переход к аномалии изменяет левую часть граничных условий (1), ибо операция вычисления МГПСТ не дистрибутивна: $\left|\mathrm{grad}\, W\right|\neq\left|\mathrm{grad}\, U\right|+\left|\mathrm{grad}\, V\right|$. Если $\psi(S)$ – МГПСТ W, определяем потенциал аномалии U из решения нелинейной граничной задачи

$$\Delta u(x_i)=0,\ x_i\in G,\ u|_\infty=v|_\infty,\ U_{x_1}^2+U_{x_2}^2+U_{x_3}^2+2\left(V_{x_1}U_{x_1}+V_{x_2}U_{x_2}+V_{x_3}U_{x_3}\right)=\psi^2(S)-\left|\mathrm{grad}\, V\right|^2, \qquad (5)$$

граничные значения которой при нулевом потенциале нормальной силы тяжести совпадают с граничными условиями (1). Выяснение численной скорости сходимости задачи (5) имеет отдельный практический интерес.

1. *Алексидзе М.А*. Решение некоторых основных задач гравиметрии. - Тб.: Мецниереба, 1985. - 412 с.

2. *Дубовенко Ю. И.* Способ восстановления потенциала по значениям модуля его градиента: Сб. тез. науч. конф. „Геофизические технологии прогнозирования и мониторинга геологической среды”, Львов, 6-10 октября 2008 г. – Львов: Сполом, 2008. – С. 156-158.

3. *Дубовенко Ю. И.* О раздельной способности редукций аномалий силы тяжести // Геофиз. журн.– 2011. – **33**, № 2. – С. 135-143.